Ion TUDOR

matematică

algebră, geometrie

- Modalităţi de lucru diferenţiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea a II-a

7

Ediţia a VIII-a

Editura Paralela 45

Cuprins

ALGEBRĂ

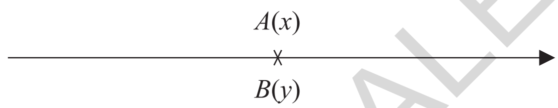
Capitolul II

ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

Lecția 1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Citesc și rețin

Numerele reale x și y sunt egale, dacă punctele de pe axa numerelor care au coordonatele x, respectiv y sunt identice ($A(x) = B(y)$).



Pe mulțimea numerelor reale, relația de egalitate are următoarele proprietăți:

1. Reflexivitate: $x = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

2. Simetrie: dacă $x = y$, atunci și $y = x$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

3. Tranzitivitate: dacă $x = y$ și $y = z$, atunci $x = z$, pentru orice $x, y, z \in \mathbb{R}$.

În $\mathbb{R}$, o egalitate se transformă într-o egalitate echivalentă, dacă:

– se adună sau se scade din ambii membri ai egalității același termen:

$$x = y \Leftrightarrow x + z = y + z;\ x = y \Leftrightarrow x - z = y - z;$$

– se înmulțesc sau se împart ambii membri ai egalității cu același factor nenul:

$$x = y \Leftrightarrow x \cdot z = y \cdot z;\ x = y \Leftrightarrow x : z = y : z.$$

De asemenea, dacă se adună, se scad, se înmulțesc sau se împart membru cu membru două egalități, se obține tot o egalitate.

Dacă $x = y$ și $z = t$, atunci $x + z = y + t$, $x - z = y - t$, $x \cdot z = y \cdot t$ și $x : z = y : t$ ($z \neq 0$, $t \neq 0$).

Definiție: O egalitate care conține una sau mai multe variabile și care este adevărată pentru orice valori atribuite acestora se numește **identitate**.

Cum se aplică?

1. Știind că $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, arătați că $x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

Soluție:

$x = y \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} = y \cdot 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x \cdot 2\sqrt{3} - 31 = y \cdot 2\sqrt{3} - 31$.

2. Se consideră numerele reale a, b, c şi d, care îndeplinesc condiţiile $4a = 3b$ şi $25c = 10d$. Arătaţi că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Soluţie:

$4a = 3b \Leftrightarrow 3 \cdot 4a = 3 \cdot 3b \Leftrightarrow 12a = 9b$; $25c = 10d \Leftrightarrow 25c : 5 = 10d : 5 \Leftrightarrow 5c = 2d$. Din $12a = 9b$ şi $5c = 2d$ rezultă că $12a - 5c = 9b - 2d$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x + 3 = y + 3$; ☐ b) $x - 8 = y - 8$; ☐
c) $x - 1,(3) = y - 1,(3)$; ☐ d) $x + \sqrt{2} = \sqrt{2} + y$. ☐

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $x \cdot 27 = y \cdot 27$; ☐ b) $x : \sqrt{5} = y : \sqrt{5}$; ☐
c) $x \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot y$; ☐ d) $x : (-23) = y : (-23)$. ☐

3. Dacă x şi y sunt două numere reale care îndeplinesc condiţia $24x = 36y$, arătaţi că:

a) $6x = 9y$; b) $4x = 6y$; c) $2x = 3y$.

c)

4. Dacă x şi y sunt două numere reale, astfel încât $x = y$, arătaţi că:

a) $x \cdot \frac{1}{2} + 53 = y \cdot \frac{1}{2} + 53$; b) $x \cdot \sqrt{2} - 41 = y \cdot \sqrt{2} - 41$.

b)

5. Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $2z = 5t$. Arătaţi că:

a) $20z = 50t$; b) $\frac{z}{5} = \frac{t}{2}$; c) $2\sqrt{7}z = 5\sqrt{7}t$.

b)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

6. Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, cu proprietatea $6x = 2\sqrt{3}y$. Arătaţi că:

a) $2\sqrt{3}x = 2y$; b) $\sqrt{3}x = y$; c) $\sqrt{6}x = \sqrt{2}y$.

7. Dacă a, b, c şi d sunt numere reale care îndeplinesc condiţiile $10a = 15b$ şi $35c = 28d$, arătaţi că $2a + 5c = 3b + 4d$.

8. Se consideră numerele $a, b \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $\sqrt{3}a^3 = \sqrt{6}b$ şi $2\sqrt{3}a = \sqrt{6}b^3$. Arătaţi că $|a| = |b|$.

9. Verificaţi identităţile:

a) $xy + x + y + 1 = (x + 1)(y + 1)$; b) $xy - x - y + 1 = (x - 1)(y - 1)$.

10. Verificaţi identităţile:

a) $\frac{1}{2}xy + x + y + 2 = \frac{1}{2}(x + 2)(y + 2)$; b) $\frac{1}{3}xy - x - y + 3 = \frac{1}{3}(x - 3)(y - 3)$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

11. Se consideră numerele $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, care îndeplinesc condiţiile $a + b + c = 1$ şi $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 0$. Arătaţi că $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$.

12. Se consideră numerele $x, y, z \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $x \cdot y \cdot z = 1$ şi $\frac{x^2+yz}{1+x^3} + \frac{y^2+zx}{1+y^3} + \frac{z^2+xy}{1+z^3} = 0$. Arătaţi că: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră numerele $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$. Arătaţi că:

a) $x\sqrt{2} - 1 = y\sqrt{2} - 1$; b) $\frac{x}{2} + 3 = \frac{y}{2} + 3$.

(3p) **2.** Se consideră numerele reale z şi t, care îndeplinesc condiţia $\sqrt{10}x = \sqrt{14}y$. Arătaţi că $\sqrt{5}x + 2 = \sqrt{7}y + 2$.

(3p) **3.** Se consideră numerele reale $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, care îndeplinesc condiţiile $4a = 5b$ şi $14c = 10d$. Arătaţi că $12a + 7c = 15b + 5d$.

Lecţia 2. Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$

Citesc şi reţin

O ecuaţie de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ şi $x \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie de gradul I cu o necunoscută**.

Definiţie: Un număr $u \in \mathbb{R}$ se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă

$au + b = 0$ (u verifică ecuaţia).

A rezolva ecuaţia (1) înseamnă a determina **mulţimea de soluţii**

$$S = \{u \in \mathbb{R} \mid au + b = 0\}.$$

Definiţie: Două ecuaţii de gradul I cu o necunoscută se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime de soluţii.

Pentru a rezolva ecuaţia (1) putem folosi proprietăţile relaţiei de egalitate pe $\mathbb{R}$.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ următoarele ecuaţii:

a) $-20x = -35$; b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6}$.

Soluţie:

a) $-20x = -35 \Leftrightarrow x = \dfrac{-35}{-20} \Leftrightarrow x = +\dfrac{35^{(5}}{20} \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{4} \Leftrightarrow x = 1\dfrac{3}{4}$;

b) $3\sqrt{2}x = -6\sqrt{6} \Leftrightarrow x = \dfrac{-6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -\dfrac{6\sqrt{6}}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = -2\sqrt{3}$.

2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2$; b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Soluţie:

a) $1{,}5 + 0{,}(6)x = 2 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 2 - 1{,}5 \Leftrightarrow 0{,}(6)x = 0{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{6^{(3}}{9}x = \dfrac{5^{(5}}{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{3}x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} : \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{4}$;

b) $8\sqrt{6} : x - \sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = \sqrt{2} + \sqrt{2} \Leftrightarrow 8\sqrt{6} : x = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow x = (8\sqrt{6}) : (2\sqrt{2}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{3}$.

3. Rezolvaţi ecuaţia $\dfrac{3x}{5} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2(7x+5)}{15}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

Soluţie:

$\dfrac{^{6)}3x}{5} - \dfrac{^{15)}1}{2} = \dfrac{^{2)}2(7x+5)}{15} \Leftrightarrow 18x - 15 = 4(7x + 5) \Leftrightarrow 18x - 15 = 28x + 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 18x - 28x = 20 + 15 \Leftrightarrow -10x = 35 \Leftrightarrow x = \dfrac{35^{(5}}{-10} \Leftrightarrow x = -\dfrac{7}{2}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Verificaţi dacă numărul real 4 este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + 37 = 41$; ☐ b) $3x - 2 = 10$; ☐ c) $x : (-2) = 2$. ☐

b)

2. Verificaţi dacă numărul real $\frac{1}{2}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $x + \frac{3}{2} = 2$; ☐ b) $1{,}5 - x = 1$; ☐ c) $2\frac{1}{2} + x = 2$. ☐

b)

c)

3. Verificaţi dacă numărul real $\sqrt{3}$ este soluţie pentru fiecare dintre următoarele ecuaţii, apoi completaţi caseta cu răspunsul corespunzător „Da” sau „Nu”:

a) $\sqrt{3}\,x + 2 = 0$; ☐ b) $x : \sqrt{3} + 3 = 4$; ☐ c) $\sqrt{6x} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. ☐

c)

4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $8x = 4$; b) $6x = 9$; c) $4x = 6$; d) $6x = 2$;
e) $-10x = 15$; f) $18x = -12$; g) $-14x = -8$; h) $-15x = -9$.

c)

h)

5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţiile:

a) $x + 7 = 11$; b) $x - 8 = 10$; c) $x + 4 = 17$; d) $x - 5 = 14$;
e) $15 + x = 8$; f) $x - 2 = -7$; g) $x + 31 = 9$; h) $x - 6 = -5$.

Lecţia 4. Sisteme de două ecuaţii liniare cu două necunoscute

Citesc şi reţin

Definiţie:

O ecuaţie de forma $ax + by + c = 0$, a, b, $c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ sau $b \neq 0$ şi $x, y \in \mathbb{R}$ (1), se numeşte **ecuaţie liniară cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a ecuaţiei** (1), dacă $au + bv + c = 0$ (u şi v verifică ecuaţia). Ecuaţia (1) are o infinitate de soluţii.

Definiţie:

Ansamblul a două ecuaţii liniare cu două necunoscute x şi y, scris sub forma:

$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$, unde $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ (2), se numeşte **sistem de două ecuaţii cu două necunoscute**.

Definiţie:

Perechea ordonată $(u; v)$, unde $u, v \in \mathbb{R}$, se numeşte **soluţie a sistemului** (2), dacă $a_1u + b_1v + c_1 = 0$ şi $a_2u + b_2v + c_2 = 0$.

A rezolva sistemul de ecuaţii (2) înseamnă a determina mulţimea soluţiilor sale. Mulţimea soluţiilor unui sistem se notează cu S.

Mulţimea soluţiilor S ale sistemului de ecuaţii (2) este intersecţia mulţimilor de soluţii ale ecuaţiilor componente.

Definiţie:

Două sisteme de ecuaţii se numesc **echivalente**, dacă au aceeaşi mulţime a soluţiilor.

A. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda substituţiei

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda substituţiei sunt:

– exprimarea uneia dintre necunoscute dintr-o ecuaţie în funcţie de cealaltă necunoscută;
– substituirea necunoscutei respective în cealaltă ecuaţie a sistemului, care devine astfel o ecuaţie cu o singură necunoscută;
– rezolvarea ecuaţiei cu o necunoscută;
– aflarea celeilalte necunoscute şi determinarea mulţimii soluţiilor sistemului.

Cum se aplică?

1. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x = 7y \\ 2x - y = 13 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} x = 7y \\ 2 \cdot 7y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 14y - y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ 13y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 1 \end{cases}, \text{ deci } S =$$

$= \{(7; 1)\}$.

2. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} 3x + y = -2 \\ 5x + 4y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x + 4(-3x - 2) = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ 5x - 12x - 8 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ -7x = 14 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -\dfrac{14}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x - 2 \\ x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases}, \text{ deci } S = \{(-2; 4)\}.$$

3. Rezolvaţi prin metoda substituţiei sistemul de ecuaţii $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$.

Soluţie:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{5} \\ 3x - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 3 \cdot \dfrac{2y}{5} - 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ \dfrac{6y}{5} - {}^{5)}2y = {}^{5)}4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ 6y - 10y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ -4y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -\dfrac{20}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2y}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2 \cdot (-5)}{5} \\ y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -5 \end{cases}, \text{ deci } S =$$

$= \{(-2; -5)\}$.

B. Rezolvarea sistemului (2) prin metoda reducerii

Etapele principale ale rezolvării sistemului (2) prin metoda reducerii sunt:
- înmulţirea fiecărei ecuaţii cu câte un număr, astfel încât prin adunarea ecuaţiilor obţinute termenii care conţin una dintre necunoscute să se reducă;
- rezolvarea ecuaţiei obţinute după reducerea uneia dintre necunoscute;
- reducerea celeilalte necunoscute în mod asemănător sau aflarea acesteia prin metoda substituţiei şi determinarea mulţimii soluţiilor sistemului.

Cum se aplică?

1. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} -x+y=-4 \\ x+7y=12 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} -x+y=-4 \\ \underline{x+7y=12} \\ \;/\quad 8y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y=8 \\ x+7y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{8}{8} \\ x+7y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x+7\cdot 1=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x+7=12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=12-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=5 \end{cases}, \text{ deci } S=\{(5;\,1)\}.$$

2. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x-2y-3=0 \\ 14x-3y=-5 \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} 3x-2y-3=0 \\ 14x-3y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=3 \\ 14x-3y=-5 \end{cases}\begin{vmatrix} \cdot(-3) \\ \cdot 2 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -9x+6y=-9 \\ \underline{28x-6y=-10} \\ 19x \quad / \quad = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 19x=-19 \\ 3x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{19}{19} \\ 3x-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ 3\cdot(-1)-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -3-2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -2y=3+3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ -2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-\dfrac{6}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}, \text{ deci } S=\{(-1;\,-3)\}.$$

3. Rezolvați prin metoda reducerii sistemul de ecuații $\begin{cases} \dfrac{x}{\sqrt{2}}-\dfrac{y}{\sqrt{2}}=4 \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases}$.

Soluție:

$$\begin{cases} {}^{\sqrt{2})}\dfrac{x}{\sqrt{2}}-{}^{\sqrt{2})}\dfrac{y}{\sqrt{2}}=4 \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{2}}{2}-\dfrac{y\sqrt{2}}{2}={}^{2)}4 \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x\sqrt{2}}{2}-\dfrac{y\sqrt{2}}{2}=\dfrac{8}{2} \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2}-y\sqrt{2}=8 \mid \cdot 3 \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \mid \cdot\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{2}x-3\sqrt{2}y=24 \\ \underline{8\sqrt{2}x+3\sqrt{2}y=-2} \\ 11\sqrt{2}x \quad / \quad =22 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\sqrt{2}x=22 \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{22}{11\sqrt{2}} \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{{}^{\sqrt{2})}2}{\sqrt{2}} \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2\sqrt{2}}{2} \\ 8x+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ 8\sqrt{2}+3y=-\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

Fişă pentru portofoliul elevului

Numele şi prenumele:
Clasa a VII-a
Capitolul: Ecuaţii şi sisteme de ecuaţii liniare
Se acordă 10 puncte din oficiu.

I. Dacă propoziţia este adevărată, subliniaţi litera A, iar dacă propoziţia este falsă, subliniaţi litera F.

(7p) **1.** Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $x = y$, atunci $\sqrt{5}x = y\sqrt{5}$. A F

(7p) **2.** Soluţia ecuaţiei $\frac{1}{7} + x = \frac{8}{7}$, unde $x \in \mathbb{R}$, este $x = 1$. A F

(7p) **3.** Mulţimea $S = \{(3; -2)\}$ este soluţia sistemului $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 4 \end{cases}$. A F

II. Completaţi spaţiile punctate cu răspunsul corect.

(7p) **1.** Fracţiile ordinare $\frac{n+1}{6}$ şi $\frac{2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, sunt echivalente pentru $n =$ ....

(7p) **2.** Ştiind că, după o ieftinire cu 5%, o rachetă de tenis de câmp costă 152 lei, înseamnă că preţul rachetei înainte de ieftinire era de ....lei.

(7p) **3.** Soluţia sistemului de ecuaţii $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$ este perechea de numere reale $(x; y) =$ ....

III. Încercuiţi litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(8p) **1.** Un sfert dintr-un număr este cu 3,5 mai mic decât trei cincimi din numărul respectiv. Numărul este egal cu:
A. 15; B. 28; C. 10; D. 12.

(8p) **2.** Rotunjind la prima zecimală soluţia ecuaţiei $3 - \sqrt{6}x = 3\sqrt{2} - \sqrt{3}x$, unde $x \in \mathbb{R}$, obţinem numărul:
A. 1,7; B. 1,4; C. 2,5; D. 3,2.

(8p) **3.** Într-o clasă sunt 28 de elevi. Ştiind că numărul fetelor este cu 5 mai mic decât dublul numărului băieţilor, atunci numărul băieţilor este egal cu:
A. 10; B. 15; C. 12; D. 11.

La exercițiile IV. și V. scrieți pe fișă rezolvările complete.

IV. Radu a cheltuit o sumă de bani în 3 zile. În prima zi a cheltuit $\frac{3}{8}$ din sumă, în ziua

(8p) următoare a cheltuit $\frac{8}{9}$ din suma cheltuită în ziua precedentă, iar în ultima zi a cheltuit restul de 175 lei. Calculați suma de bani cheltuită de Radu a doua zi.

V. Se consideră sistemul de ecuații $\begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{2}} - \frac{3y}{\sqrt{3}} = 2 \\ \frac{x+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = \frac{y-2\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$.

(8p) a) Aflați soluția sistemului de ecuații.

(8p) b) Comparați numerele reale x și y.

Capitolul III
ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

Lecția 6. Produsul cartezian a două mulțimi nevide

Citesc şi reţin

Definiţie: Produsul cartezian a două mulţimi nevide A şi B, notat $\boldsymbol{A \times B}$, este mulţimea formată cu perechile ordonate (a, b), unde $a \in A$ şi $b \in B$.

$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$.

Observaţii:

1. $(a, b) \neq (b, a)$, dacă $a \neq b$.
2. $A \times B \neq B \times A$, dacă $A \neq B$.

Teoremă: Dacă card $A = m$ şi card $B = n$, atunci $\text{card}(A \times B) = m \cdot n$.

Cum se aplică?

1. Se consideră mulţimile $A = \{d, f\}$ şi $B = \{p, b\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

Soluţie:

$A \times B = \{(d, p), (d, b), (f, p), (f, b)\}$.

2. Determinaţi mulţimile $C \cup D$, $C \cap D$, $C \setminus D$ şi $D \setminus C$, ştiind că $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$.

Soluţie:

Din $D \times C = \{(0, 0), (0, 1), (0, 3), (0, 5), (3, 0), (3, 1), (3, 3), (3, 5)\}$ rezultă că $D = \{0, 3\}$ şi $C = \{0, 1, 3, 5\}$, prin urmare $C \cup D = \{0, 1, 3, 5\}$, $C \cap D = \{0, 3\}$, $C \setminus D = \{1, 5\}$ şi $D \setminus C = \varnothing$.

3. Se consideră mulţimile $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\}$.

a) Enumeraţi elementele mulţimilor E şi F.

b) Determinaţi mulţimile $E \times F$ şi $F \times E$.

Soluţie:

a) $E = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} = \{1, 2\}$, $F = \{y \in \mathbb{Z} \mid |y| < 2\} = \{-1, 0, 1\}$;

b) $E \times F = \{(1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1)\}$;
$F \times E = \{(-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 1), (1, 2)\}$.

Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

1. Citiţi următoarele notaţii:

a) $A \times B$; b) $C \times D$; c) $E \times F$; d) $M \times N$.

2. Se consideră mulţimile $A = \{3\}$ şi $B = \{4, 5\}$. Determinaţi mulţimea $A \times B$.

3. Se consideră mulţimile $C = \{a, b\}$ şi $D = \{d, f\}$. Determinaţi mulţimea $C \times D$.

4. Enumeraţi elementele mulţimilor $A \times B$ şi $B \times A$ în fiecare dintre cazurile:

a) $A = \{0, 1\}$, $B = \{5\}$;
b) $A = \{t\}$, $B = \{a, b\}$;
c) $A = \{2, 7\}$, $B = \{3, 8\}$;
d) $A = \{f, g\}$, $B = \{o, v\}$;
e) $A = \{0, 4\}$, $B = \{0, 1, 3, 9\}$;
f) $A = \{a, b, d\}$, $B = \{c, d, h\}$.

e)

5. Se consideră mulţimile $A = \{6, 7\}$ şi $B = \{4, 8, 9\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(6, 9) \in A \times B$; ☐
b) $(4, 7) \in A \times B$; ☐
c) $(7, 2) \in A \times B$; ☐
d) $(7, 4) \in B \times A$; ☐
e) $(8, 6) \in B \times A$; ☐
f) $(9, 5) \in B \times A$. ☐

6. Se consideră mulţimile $E = \{g, h, i\}$ şi $F = \{m, n\}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) $(g, n) \notin E \times F$; ☐
b) $(i, m) \in E \times F$; ☐
c) $(n, h) \in F \times E$; ☐
d) $(n, g) \notin F \times E$; ☐
e) $(h, m) \in E \times F$; ☐
f) $(m, i) \in F \times E$. ☐

7. Determinaţi card $C \times D$ în următoarele cazuri:

a) card $C = 7$ şi card $D = 8$;
b) card $C = 6$ şi card $D = 9$.

a)

8. Ştiind că $\mathcal{D}_n$ reprezintă mulţimea divizorilor naturali ai numărului întreg n, determinaţi mulţimile:

a) $\mathcal{D}_4 \times \mathcal{D}_5$; b) $\mathcal{D}_3 \times \mathcal{D}_8$.

b)

9. Determinaţi mulţimile A şi B, ştiind că:

a) $A \times B = \{(5, 4), (5, 6), (7, 4), (7, 6), (9, 4), (9, 6)\}$;

b) $B \times A = \{(d, f), (d, g), (f, f), (f, g), (h, f), (h, g), (p, f), (p, g)\}$;

c) $B \times A = \{(2, 2), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (8, 2), (8, 5)\}$.

c)

Exerciţii şi probleme de dificultate medie

10. Dacă notăm cu A mulţimea numerelor prime de o cifră şi cu B mulţimea numerelor compuse de o cifră, determinaţi mulţimea $B \times A$.

11. Se consideră mulţimile $C = \{x \mid x$ este literă a cuvântului „mediana”$\}$ şi $D = \{y \mid y$ este literă a cuvântului „tangenta”$\}$. Determinaţi card $D \times C$.

12. Se consideră mulţimile $E = \{a \mid \overline{25a7} < \overline{25aa}\}$ şi $F = \{b \mid \overline{8bb0} > \overline{85b1}\}$. Determinaţi mulţimea $E \times F$.

13. Determinaţi mulţimile $A \times B$ şi $B \times A$, ştiind că:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{2x} \,\vdots\, 3\} \quad \text{şi} \quad B = \{x \in \mathbb{N}^* \mid \overline{x2} \,\vdots\, 4\}.$$

14. Determinaţi mulţimile $E \times F$ şi $F \times E$ în următoarele cazuri:

a) $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 2\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{Z}^* \mid |y| \leq 1\}$;

b) $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 3\}$ şi $F = \{y \in \mathbb{N}^* \mid y \leq 2\}$.

15. Enumeraţi elementele mulţimilor $E \cup F$, $E \cap F$, $E \setminus F$ şi $F \setminus E$ în următoarele cazuri:

a) $E \times F = \{(x, x), (x, t), (y, x), (y, t), (z, x), (z, t)\}$;

b) $F \times E = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3)\}$.

16. Se consideră mulţimile $E = \{y \mid \overline{xy} \text{ este număr prim}\}$ şi $F = \{c \mid \overline{abc} \text{ este pătrat perfect}\}$. Determinaţi card $E \times F$.

17. Se consideră mulţimile $A = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ şi $B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuaţi $B \times A$.

18. Enumeraţi elementele mulţimii $A \times B$, ştiind că mulţimile A şi B îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $A \cup B = \{b, c, d\}$; ii) $A \cap B = \{b, d\}$; iii) $A \setminus B = \varnothing$.

19. Determinaţi mulţimea $E \times F$, pentru mulţimile E şi F care îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $E \cap F = \{4, 5\}$; ii) $E \setminus F = \varnothing$; iii) $F \setminus E = \{7, 8\}$.

20. Determinaţi mulţimea $E \times D$, ştiind că mulţimile D şi E îndeplinesc simultan condiţiile:

i) $D \cup E = \{d, g, p, t\}$; ii) $D \setminus E = \varnothing$; iii) $E \setminus D = \{d, t\}$.

21. Se consideră mulţimile A şi B. Dacă card $A \cap B = 5$, card $A \setminus B = 2$ şi card $B \setminus A = 3$, calculaţi card $A \times B$.

22. Se consideră mulţimile E şi F. Dacă card $E \cup F = 9$, card $E \setminus F = 1$ şi card $F \setminus E = 4$, determinaţi card $F \times E$.

Exerciţii şi probleme de dificultate avansată

23. Determinaţi card $E \times F$, unde $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid |1 - 2x| \leq 3\}$ şi $F = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{3x+7}{2x+3} \in \mathbb{N}\right\}$.

24. Se consideră mulţimile $A = \{3n - 2, n + 5, 5n + 4\}$ şi $B = \{3n - 1, n + 4, 4n + 7\}$. Determinaţi numărul întreg n, ştiind că $A \times B = B \times A$.

25. Determinaţi card $A \times B$ pentru mulţimile:

$A = \left\{\overline{abc} \,\middle|\, \sqrt{a+b+c} \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \sqrt{a \cdot b \cdot c} \in \mathbb{N}^*\right\}$ şi $B = \left\{\overline{xyz} \,\middle|\, \overline{xyz} = \left(1+2+3+\ldots+\overline{yz}\right) - 5x\right\}$.

Ce notă merit?
Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

(3p) **1.** Se consideră mulţimile $E = \{2, 4\}$ şi $F = \{4, 5, 6\}$. Determinaţi mulţimile:

a) $E \times F$; b) $F \times E$.

(3p) **2.** Determinaţi mulţimile $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ şi $B \setminus A$, ştiind că $A \times B = \{(x, y), (x, t), (y, y), (y, t), (z, y), (z, t), (t, y), (t, t)\}$.

(3p) **3.** Se consideră mulţimile $E = \{x \mid 2 \mid \overline{7x} \text{ şi } 4 \nmid \overline{7x}\}$ şi $F = \{y \mid 3 \mid \overline{8y5} \text{ şi } 9 \nmid \overline{8y5}\}$. Efectuaţi $F \times E$.

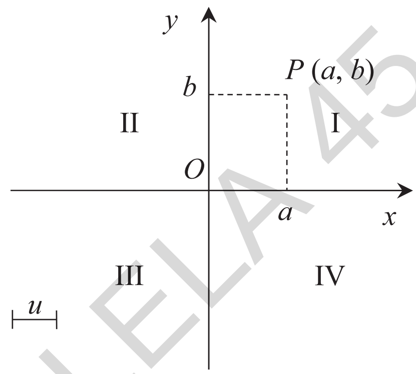
Lecţia 7. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Citesc şi reţin

Definiţie: Prin **sistem de axe ortogonale** înţelegem figura formată din două axe ale numerelor, care sunt perpendiculare şi care au drept origine punctul lor de intersecţie.

În figura alăturată, xOy este un sistem de axe ortogonale cu originea în punctul O. Dreapta Ox se numeşte **axa absciselor**, dreapta Oy se numeşte **axa ordonatelor**, iar segmentul de lungime u a fost ales drept unitate de măsură.

Sistemul de axe ortogonale xOy împarte planul în patru părţi numite **cadrane**, notate cu cifrele romane I, II, III şi IV ca în figură.



Fiecărei perechi de numere $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ îi asociem ca în figură un punct P, notat $\boldsymbol{P(a, b)}$ şi care se citeşte „punctul P de abscisă a şi ordonată b" sau „punctul P de coordonate a şi b".

Observaţie: Fie M mijlocul segmentului AB. Dacă $A(x_1, y_1)$ şi $B(x_2, y_2)$, atunci

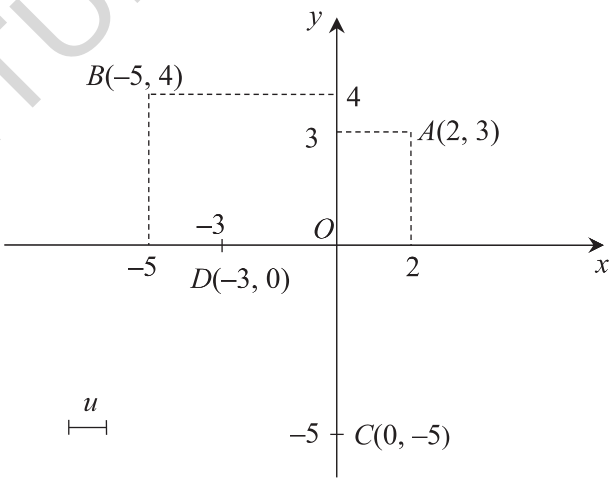
$$M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Cum se aplică?

1. Reprezentaţi într-un sistem de axe ortogonale xOy următoarele puncte:

a) $A(2, 3)$; b) $B(-5, 4)$; c) $C(0, -5)$; d) $D(-3, 0)$.

Soluţie:



2. Notăm cu M mijlocul segmentului EF. Considerând punctele $M(-1, 4)$ şi $F(2, -3)$, determinaţi coordonatele punctului E.

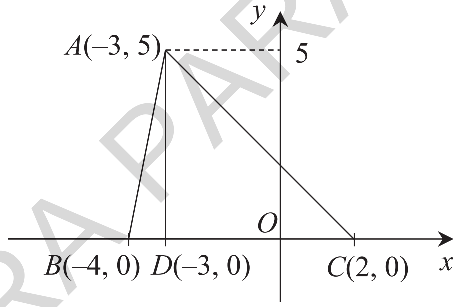
Soluţie:

Notăm cu x şi cu y abscisa, respectiv ordonata punctului E. Deoarece $M(-1, 4)$ şi $M\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+(-3)}{2}\right)$, rezultă că $\frac{x+2}{2} = -1$ şi $\frac{y+(-3)}{2} = 4$. Din $\frac{x+2}{2} = -1$ rezultă $x + 2 = -2$, de unde obţinem $x = -4$. Din $\frac{y+(-3)}{2} = 4$ rezultă $y + (-3) = 8$, de unde obţinem $y = 11$. Prin urmare, $E(-4, 11)$.

3. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele $A(-3, 5)$, $B(-4, 0)$ şi $C(2, 0)$ şi apoi calculaţi aria triunghiului ABC.

Soluţie:

Observăm că $BC = |BO| + |OC| = |-4| + |2| = 4 + 2 = 6u$, iar înălţimea corespunzătoare laturii BC a triunghiului ABC este segmentul AD a cărui lungime reprezintă ordonata punctului A, prin urmare $AD = 5u$; $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{6u \cdot 5u}{2} = 15u^2$.



Ştiu să rezolv

Exerciţii şi probleme de dificultate minimă

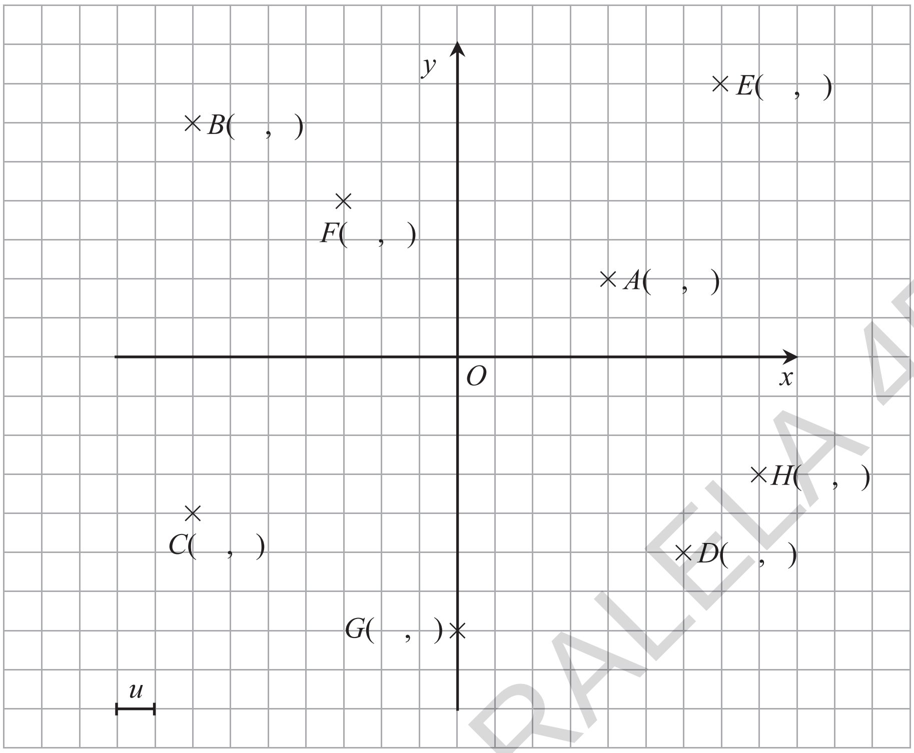
1. Citiţi următoarele propoziţii:

a) $A(2, \sqrt{5})$; b) $D(-7, 1)$; c) $G(4, -9)$; d) $E(-2, -3)$.

2. Numiţi ordonata şi abscisa pentru fiecare dintre punctele:

a) $M(0, \sqrt{2})$; b) $E(-1, 3)$; c) $B(7, \sqrt{6})$; d) $N(-2, -1)$.

3. În figura următoare sunt reprezentate punctele A, B, C, D, E, F, G şi H în sistemul de axe ortogonale xOy. Completaţi parantezele cu coordonatele punctelor respective:



4. Reprezentaţi în sistemul de axe ortogonale xOy punctele:

a) $A(2, 3)$; b) $B(3, 5)$; c) $C(-2, 4)$; d) $D(-5, 2)$;
e) $E(-6, -1)$; f) $F(-7, 6)$; g) $G(8, -4)$; h) $H(-4, -5)$.